

## Seminar “Numerical Digit Challenge”

In diesem Seminar sollen Sie fünf mathematische Probleme lösen, deren Ergebnis jeweils eine reelle Zahl ist. Der Auftrag lautet, diese Zahlen auf möglichst viele Ziffern (ohne Rundung) genau zu berechnen.

**Aufgabe 1:** Sei  $a(n) = 1/n$ , wenn  $n \in \mathbb{N}$  eine Primzahl ist und *nicht* die Ziffer 1 enthält, und  $a(n) = 0$  sonst. Berechnen Sie

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a(n).$$

**Aufgabe 2:** Definiere die stochastische Fibonacci-Folge durch  $x_0 = x_1 = 1$  und

$$x_{n+1} = x_n \pm \frac{3}{5}x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei das Vorzeichen mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  positiv oder negativ ist. Berechnen Sie

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{1/n}.$$

**Aufgabe 3:** Berechnen Sie

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \sin(\cos(x)e^{1/x}) dx.$$

**Aufgabe 4:** Lösen Sie das Integral

$$J = \int_{\mathbb{R}^8} \sin\left(\prod_{n=1}^8 x_n^n\right) \exp\left(-\frac{1}{10} \sum_{n=1}^8 x_n^2\right) dx.$$

**Aufgabe 5:** Die Lotka-Volterra-Differentialgleichungen

$$x' = (1 - by)x, \quad y' = (-1 + x)y, \quad t > 0,$$

mit Anfangswerten  $x(0) = 1/5$  und  $y(0) = 1/5$  besitzen periodische Lösungen  $(x(t), y(t))$ . Bestimmen Sie den Parameter  $b > 0$  so, dass die Periode  $T = 10$  ist.

**Spielregeln:** Sie dürfen die Aufgaben alleine oder in einer Gruppe von 2-3 Studierenden lösen und Einfälle und Vorschläge von Bekannten, aus der Literatur oder aus dem Internet einholen. Im Seminar sollen Sie regelmäßig an der Tafel über Ihre Fortschritte zur Lösung der Aufgaben berichten. Die Lösungen müssen mit Begründungen, Rechnungen oder Programmen in schriftlicher Form bis spätestens 28.01.2011 vorliegen. Sie sollen begründen, warum Sie denken, dass die gefundenen Ziffern korrekt sind. “Gewonnen” hat diejenige Person bzw. Gruppe, die am meisten korrekte Ziffern (ohne Rundung) gefunden hat.

**Tipps:** Versuchen Sie zunächst, sich mit den Problemen vertraut zu machen, indem Sie z.B. die Aufgaben mit einer vereinfachten Aufgabenstellung oder mit mathematischer Standard-Software (Matlab, Maple, Mathematica, Femlab, Intlab etc.) lösen. Eventuell können Sie das Problem umformulieren, so dass die Umformulierung einfacher zu lösen ist, oder in einen allgemeineren Kontext einbetten, der es Ihnen erlaubt, eine mathematische Theorie anzuwenden. Um die Korrektheit Ihrer Ziffern zu begründen, können Sie Intervallarithmetik verwenden (es gibt Zusatzpakete für Mathematica, Maple, Matlab oder C) oder verschiedene Algorithmen implementieren. Misstrauen Sie den Ergebnissen von Standardsoftware und berücksichtigen Sie den Einfluss von Rundungsfehlern.

Mehr Tipps finden Sie in dem Buch “Vom Lösen numerischer Probleme“ von F. Bornemann et al. (Springer 2007).